SUL CALCOLO APPROSSIMATO DEGLI INTEGRALI D'ORDINE SUPERIORE NOTA...

Giusto Bellavitis



SUL CALCOLO APPROSSIMATO

DEGLI

INTEGRALI D' ORDINE SUPERIORE

NOTA

DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS

MEMBRO EFFETTIVO PENSIONATO DELL' I. R. ISTITUTO VENETO
DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

(Estr. dal Volume VI delle Memorie dell' Istituto stesso)





VENEZIA
PRESSO LA SEGRETERIA DELL' ISTITUTO
NEL PALAZZO DUCALE
1856.
NEL PRIV. STAB. NAZ. DI G. ANTONELLI

SUL CALCOLO APPROSSIMATO

DEGLI

INTEGRALI D' ORDINE SUPERIORE

Le applicazioni delle matematiche richieggono bene spesso che si calcolino numericamente alcuni valori, i quali non si possono ridurre a funzioni già conosciute; sarebbe laborioso ed imbarazzante il formar tavole, che unite a quelle utilissime dei logaritmi e delle funzioni circolari, ed alle altre, di minor uso, delle trascendenti ellittiche, del fattoriale $[1]^x$, e degl' integrali $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{dx}{\log x}$, ec., dessero modo di calcolare parecchie altre funzioni. Siccome molte volte le funzioni incognite dipendono dall' integrazione, così tornano opportuni i metodi per calcolare numericamente gl' integrali dei varii ordini. In questa nota espongo le formule che a tal uopo mi sembrano di più generale e comodo uso.

1.° Dati alquanti valori $(y_0, y_1, y_2 \ldots y_n)$ che io suppongo corrispondere ad intervalli eguali della variabile indipendente (x), si vogliono determinare gl'integrali primo, secondo, terzo, ec., della funzione (y), cui quei valori appartengono. Si scrivano le differenze prime dei dati valori $(y_0, y_1, \ldots)$, ed accanto ad esse le differenze seconde, poi le terze, ec.: questi calcoli facilissimi giovano eziandio a scoprire qualche errore che fosse occorso nella determinazione dei dati valori. Per avere l' integrale primo, piuttostochè moltiplicare quei valori $(y_0, y_1, \ldots)$ per appositi coefficienti (i quali cangerebbero col numero di essi valori), giova meglio prendere in ciascun ordine di differenze le somme, o le differenze, alternativamente, delle due differenze estreme, e quelle somme, o differenze, moltiplicarle poi per coefficienti costanti: così il valore dell'integrale viene

espresso da una serie, della cui convergenza, od almeno semiconvergenza, è facile formarsi idea sufficiente ad apprezzare il grado di approssimazione che per tal modo si ottiene.

2.° Gl' integrali secondo, terzo, ec. ($\int^2 y dx^2$, $\int^3 y dx^3$, ec.) richieggono oltre i predetti valori ($y_0, y_1, \ldots$), insieme colle serie delle loro differenze, anche altri numeri, che si ottengono con egual facilità procedendo in verso opposto a prendere le somme, anzichè le differenze. Vale a dire, si scriverà una serie di numeri, le cui differenze sono appunto i valori ($y_0, y_1, \ldots$) primitivamente dati; poscia altra serie di numeri, che avranno per differenze quelli già trovati, e così in seguito. Ciascun integrale è poi determinato da una speciale serie infinita non molto dissimile da quella, che dà l' integrale primo. Soltanto bisogna preventivamente determinare i primi termini di quelle serie di numeri, che sono le sommatorie dei dati valori: a tale scopo, se si stabilisca che all' origine ($x = 0$) debba svanire, oltrechè l' integrale secondo, anche il suo differenziale, ed oltrechè l' integrale terzo anche i suoi due differenziali primo e secondo, e così in seguito, bisogna con apposita serie infinita determinare la prima di ciascuna sommatoria.

3.° Ecco il prospetto dei valori della funzione y, e delle sue differenze e sommatorie: colla caratteristica V indico i valori variati corrispondenti ad $x = 1, 2, \ldots n$.

				$y = y_0$			
			$V\Sigma y$		$\Delta y = Vy - y$		
		$V^2\Sigma^2 y$		$Vy = y_1$		$\Delta^2 y = V\Delta y - \Delta y$	
	$V^3\Sigma^3 y$		$V^2\Sigma y = V\Sigma y + Vy$		$V\Delta y = V^2 y - Vy$		…
…		$V^3\Sigma^2 y = V^2\Sigma^2 y + V^2\Sigma y$		$V^2 y = y_2$		$V\Delta^2 y = V^2\Delta y - V\Delta y$	
…	.	.	.	.	.	.	…
…	.	.	.	.	.	.	…
…	.	.	.	.	.	.	…
…	$V^n\Sigma^3 y$	.	.	.	.	$V^{n-2}\Delta^2 y$	…
		$V^n\Sigma^2 y$	$V^n\Sigma y$	.	$V^{n-1}\Delta y$		
				$V^n y = y_n$			

4.° Sono note le relazioni tra queste differenze e sommatorie ed i differenziali, ossia le derivate rispetto alla variabile indipendente x, che segneremo colla caratteristica d. Tali relazioni possono esprimersi simbolicamente così:

$$\Delta = V - V^0,\quad \Sigma = \frac{1}{\Delta},\quad \Delta = e^d - 1,\quad d = \log(1 + \Delta),\quad \int = \frac{1}{d} = \frac{1}{\log(1 + \Delta)}.$$

Con V^0, così pure con Δ^0 oppure d^0 viene espressa la funzione primitiva.

5.° Cominciando dall' integrale primo, abbiamo:

$$(1)\qquad \Delta\int=\frac{\Delta}{\log(1+\Delta)}=\Delta^0+\frac{1}{2}\Delta-\frac{1}{12}\Delta^2+\frac{1}{24}\Delta^3-\text{ec.}$$

Questo $\Delta\int$ è l'integrale esteso da $x=0$ ad $x=1$; per avere quello esteso da $x=0$ ad $x=n$, che segneremo con ${}^0\!\int_n$, bisogna moltiplicare $\Delta\int$ per $1+V+V^2\ldots+V^{n-1}=\frac{V^n-1}{V-1}=\frac{V^n-1}{\Delta}$; perciò

$$(2)\qquad {}^0\!\int_n=\frac{V^n-1}{\log(1+\Delta)}=(V^n-1)\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{2}(V^n-V^0)-\frac{1}{12}(V^n-1)\Delta$$
$$+\frac{1}{24}(V^n-1)\Delta^2-\text{ec.}$$

Questa formola non è al nostro caso, perchè contiene le $V^n\Delta$, $V^n\Delta^2$, ec. che non sono comprese nel precedente (§ 3) prospetto: noi possiamo eliminarle osservando che $V^n\Delta=V^{n-1}\Delta+V^{n-2}\Delta^2+V^{n-3}\Delta^3+\text{ec.}$, ed in generale $V^i=\frac{1}{(1-\Delta V^{-1})^i}$. Ma possiamo fare immediatamente la sostituzione nella formula simbolica (2) separandola in due parti $\frac{V^n}{\log(1+\Delta)}$, $\frac{-1}{\log(1+\Delta)}$ e nella prima parte ponendo $-\log\left(1-\frac{\Delta}{1+\Delta}\right)=-\log(1-V^{-1}\Delta)$ in luogo di $\log(1+\Delta)$; così si ha

$$(3)\qquad \frac{1}{\alpha}\,{}^0\!\int_n=\frac{-V^n}{\log(1-V^{-1}\Delta)}-\frac{1}{\log(1+\Delta)}=(V^{n+1}-1)\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{2}(V^n+V^0)$$
$$-\frac{1}{12}(V^{n-1}-1)\Delta-\frac{1}{24}(V^{n-2}+1)\Delta^2-\frac{19}{720}(V^{n-3}-1)\Delta^3$$
$$-\frac{5}{160}(V^{n-4}+1)\Delta^4-0{,}0142692\,(V^{n-5}-1)\Delta^5$$
$$-0{,}0113674\,(V^{n-6}+1)\Delta^6-\text{ec.}$$

Al primo membro abbiamo dato il coefficiente $\frac{1}{\alpha}$ pel caso che i valori y, Vy, ... V^ny corrispondessero ad $x=0, \alpha, 2\alpha, \ldots\ldots n\alpha$, anzichè ad $x=0, 1, \ldots n$. Il primo termine dell' ultimo membro è

$$\frac{V^{n+1}-1}{V-1}=V^0+V+\ldots+V^n.$$

6.° L' uso di questa (3) si renderà palese col seguente esempio numerico, nel quale $y=\frac{1}{x+1}$, $\alpha=\frac{1}{5}$, $n=5$; sicchè vuol determinarsi $\int\frac{dx}{x+1}$ da $x=0$ ad $x=1$, vale a dire il log 2. Ridotte in decimali le frazioni $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{10}$ se ne scriveranno come segue tutte le differenze:

Σ^2	Σ	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0,4005925	0,4855987	1,0000000	— 1666667	476191	— 178372	79366	— 39685
1,7171245	1,3167320	0,8333333	— 1190476	297619	— 99206	39681	
3,7481422	2,0310177	0,7142857	— 892857	198413	— 39525		
6,4041399	2,6560177	0,625	— 694444	138888			
	3,2115733	0,5555556	— 555556				
		0,5					
6,8045324	2,7281746	1,5	1111111	615079	119047	119047	00000
6,0037674	3,6949720	—0,5		—537505	—238097	—39685	—79370

Dopo ciò si formano le somme 1,5 , 0,0615079 , 0,0119047 dei termini primo ed ultimo delle colonne y, Δ^2, Δ^4; e nelle colonne intermedie dei Δ, Δ^3, Δ^5 sottraendo il primo numero dall' ultimo si ottengono le differenze 0,1111111, 0,0119047. Questi numeri moltiplicati pei coefficienti della formula (3) ed uniti colla somma 4,2281746 dei cinque valori di y danno 3,46... che moltiplicato per $\alpha=0,2$ offre il valore di log $2=0,6931472$ con un errore di $+0,0000158$, che è minore di quanto avrebbesi sperato osservando la grandezza degli ultimi termini della serie.

	4,2281746
—	0,75
—	0092593
—	25628
—	3142
—	2232
	3,4658151
	0,6931630

7.° Veniamo all' integrale secondo. Collo stesso ragionamento che ci servì pel primo troveremo:

$$(4)\qquad \frac{1}{\alpha^2}\,{}^{0}\!\!\int_{n}{}^{0}\!\!\int = \frac{V^n-1}{(\log(1+\Delta))^2} = \frac{V^n}{(\log(1-V^{-1}\Delta))^2} - \frac{1}{(\log(1+\Delta))^2}\,.$$

$$= (V^{n+1}-1)\frac{1}{\Delta^2} - (V^{n+1}+1)\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{12}(V^n - V^0)$$

$$-\frac{1}{240}(V^{n-2}-1)\Delta^2 - \frac{1}{240}(V^{n-3}+1)\Delta^3 - 0{,}0036541\,(V^{n-4}-1)\Delta^4$$

$$-\,0{,}0031415\,(V^{n-5}+1)\Delta^5 - 0{,}0027086\,(V^{n-6}-1)\Delta^6 - \text{ec.}$$

I due primi termini dell' ultimo membro sono:

$$\frac{V^{n+2}-1}{V-1}\,\Sigma - V^{n+1}\,\Sigma - \Sigma = (V + V^2 \ldots + V^n)\,\Sigma.$$

8.° Ci resta da determinare $V\Sigma$ (dal quale dipendono i successivi $V^2\Sigma$, $V^3\Sigma$, ec.) in guisa che il differenziale dell' integrale secondo $\iint$ svanisca esso pure colla x. Serve a tal uopo la formula

$$(5)\qquad V\Sigma = \frac{1}{e^{d}-1} - \frac{1}{d} + d^0 = \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\log(1+\Delta)} + \Delta^0.$$

Se si conoscano i valori delle derivate dy, d^2y, ec. corrispondenti ad $x=0$, si adoprerà la

$$(6)\qquad V\Sigma = \frac{1}{2}d^0 + \frac{1}{12}\alpha d - \frac{1}{6.120}\alpha^3 d^3 + \frac{1}{120.252}\alpha^5 d^5$$

$$-\frac{1}{5040.240}\alpha^7 d^7 + \text{ec.}$$

Altrimenti si sostituiranno i già calcolati valori di y, Δy, $\Delta^2 y$, ec. nell' altro sviluppo della (5)

$$(7)\qquad V\Sigma = \frac{1}{2}\Delta^0 + \frac{1}{12}\Delta - \frac{1}{24}\Delta^2 + \frac{19}{720}\Delta^3 - \frac{3}{160}\Delta^4 + \text{ec.}$$

i cui coefficienti numerici sono quelli stessi della (3).

9.° Applichiamo queste formule al precedente esempio, e cerchiamo $\iint \frac{dx^2}{x+1}$. Nel presente caso per $x=0$ si ha $y=1$, $dy=-1$, $d^2y=2$, $d^3y=-6$, $d^4y=24$, ec.; sostituendo nella (6) si trova $V\Sigma = 0{,}4833987$, che è il valore adoperato nel calcolo scritto superiormente. La serie sem-

	+ 0,5000000
	− 0,0166667
	+ 667
	− 13
$V\Sigma =$	0,4833987

bra convergentissima, ma in fatti è soltanto semiconvergente, cioè ha i termini coi segni alternativi, che in sulle prime vanno rapidamente diminuendo per poscia crescere infinitamente. La serie (7) ci avrebbe dato invece $V\Sigma = 0{,}4834504$ valore meno approssimato.

	0,5000000
—	0,0138889
—	19841
—	4712
—	1488
—	566
$V\Sigma =$	0,4834504

10.° Per continuare il calcolo dell'integrale secondo, dopo aver calcolata la colonna delle Σ alla loro somma 9,6987394, uniremo, come lo indica la (4), le differenze $-0{,}5$, $-0{,}0337303$, $-0{,}0039685$ e le somme $-0{,}0238097$, $-0{,}0079370$ dei numeri estremi di ciascuna colonna moltiplicate rispettivamente per $\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{240}$, ec. La somma moltiplicata per α^2 dà il valore di ${}^0\!\int_1 {}^0\!\int \frac{1}{x+1}$ $= 2 \log 2 - 1 = 0{,}3862944$ con leggerissimo errore.

	9,6987394
—	0,0416667
	9,6570727
+	1405
+	992
+	145
+	249
	9,6573518
	0,3862941

11.° Anche per l' integrale terzo opereremo nello stesso modo ed avremo:

$$
{}^0\!\int_n {}^0\!\int {}^0\!\int = \frac{V^n - 1}{(\log(1+\Delta))^3} = \frac{-V^n}{(\log(1 - V^{-1}\Delta))^3} - \frac{1}{(\log(1+\Delta))^3}
$$

$$
= (V^{n+3} - 1)\frac{1}{\Delta^3} - \frac{3}{2}(V^{n+2} + 1)\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{2}(V^{n+1} - 1)\frac{1}{\Delta}
$$

$$
+ \frac{1}{240}(V^{n-1} - 1)\Delta + \frac{1}{480}(V^{n-2} + 1)\Delta^2 + \text{ec.}
$$

I tre primi termini si riducono, mediante la $V = 1 + \Delta$, ad altra forma più opportuna ai nostri calcoli. Troveremo tal forma sviluppando i primi termini di $\frac{V^n}{(\log(1+\Delta))^3} + \frac{1}{(\log(1 - V^{-1}\Delta))^3}$, i quali sono

$$
(V^n - V^3)\Sigma^3 + \frac{3}{2}(V^n + V^2)\Sigma^2 + \frac{1}{2}(V^n - V)\Sigma;
$$

e siccome $(V^n - V^3)\Sigma^3 = (V^3 + V^4 \ldots + V^{n-1})\Sigma^2$; così finalmente

$$(8)\qquad \frac{1}{\alpha^3}\,{}^0\!\!\int_n {}^0\!\!\int\!\!\int = (V^1+V^2+V^3\ldots+V^n)\,\Sigma^3+\frac{1}{2}(V^n+V^1)\,\Sigma^2$$
$$+\frac{1}{2}(V^n-V)\,\Sigma+\frac{1}{240}(V^{n-1}-1)\,\Delta+\frac{1}{480}(V^{n-2}+1)\,\Delta^2$$
$$+\frac{1}{945}(V^{n-3}-1)\,\Delta^3+0{,}0005456\,(V^{n-4}+1)\,\Delta^4$$
$$+\,0{,}0002720\,(V^{n-5}-1)\,\Delta^5+\text{ec.}$$

12.° Perchè l'integrale terzo e i suoi differenziali primo e secondo svaniscano quando $x=0$ bisogna che la $V\Sigma$ siasi determinata come al § 8; e che inoltre la $V^2\Sigma^2$ si determini colle $V^2\Sigma^2=\frac{1}{(e^{-d}-1)^2}-\frac{1}{d^2}-\frac{1}{d}$

$$=\frac{e^{2d}}{(e^d-1)^2}-\frac{1}{d^2}-\frac{1}{d}=\frac{1+2\Delta+\Delta^2}{\Delta^2}-\frac{1}{(\log(1+\Delta))^2}-\frac{1}{\log(1+\Delta)},$$

che si sviluppa nella

$$(9)\qquad V^2\Sigma^2=\frac{5}{12}d^0+\frac{\alpha d}{12}+\frac{\alpha^2 d^2}{240}-\frac{\alpha^3 d^3}{720}-\frac{\alpha^4 d^4}{6048}+\frac{\alpha^5 d^5}{30240}+\text{ec.}$$

oppure nella

$$(10)\qquad V^2\Sigma^2=\frac{5}{12}\Delta^0+\frac{\Delta}{12}-\frac{5}{80}\Delta^2+\frac{1}{45}\Delta^3-\frac{913}{60480}\Delta^4$$
$$+\,0{,}0111276\,\Delta^5-0{,}0086588\,\Delta^6+\text{ec.}$$

13.° Nel nostro solito esempio troveremo mediante la (9) $V^2\Sigma^2=0{,}4003925$, e mediante la (10) $V^2\Sigma^2=0{,}4004313$; il primo valore come più esatto fu adoperato a formare la colonna Σ^2 del calcolo del § 6. Poscia per ottenere l' integrale terzo si formarono la somma $(V^n+V^1)\Sigma^2=6{,}8045524$ e la differenza $(V^n-V)\,\Sigma=2{,}7281746$, questi e gli altri numeri già calcolati (§ 6) per formare l' integrale primo, sostituiti nella (8) danno ${}^0\!\int_1 {}^0\!\int\!\!\int\frac{1}{x+1}=0{,}13629434$, che è inferiore al giusto di appena 2 delle ottave decimali.

$$
\begin{array}{rr}
(V^1+V^2+\ldots+V^n)\,\Sigma^3= & 12{,}2698191\\
+ & 3{,}4022762\\
+ & 1{,}3640873\\
+ & 4630\\
+ & 1281\\
+ & 126\\
+ & 65\\
\hline
 & 17{,}0367928\\
\hline
 & 0{,}13629434
\end{array}
$$

14.° Per istabilire la legge con cui procedono le serie relative agl' integrali d' ordine superiore, trovo opportuno presentare qui di seguito una tavola di

coefficienti numerici che ho già pubblicato negli *Annali delle scienze del regno lombardo-veneto* 1.° bimestre 1834, e che in molte circostanze riesce vantaggioso avere sott' occhio.

TAVOLA DEI COEFFICIENTI $(n)_r$

I valori di n sono scritti nella prima colonna, e quelli di r (sempre positivi) nella prima riga.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
—4	10	65	350	1701	7770	34105	145750	611501	2532530	
—3	6	25	90	301	966	3025	9330	28501	86526	261625
—2	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
—1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$\frac{-1}{240}$	0	$\frac{1}{132}$
1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$\frac{-1}{240}$	0	$\frac{1}{132}$
2	1	$\frac{-5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{-1}{240}$	$\frac{-1}{240}$	$\frac{1}{132}$
3	3	2	$\frac{-3}{4}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{-1}{40}$	$\frac{-4}{315}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{19}{5040}$	$\frac{-1}{80}$	$\frac{-1}{1320}$
4	6	11	6	$\frac{-251}{120}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{-221}{2520}$	$\frac{-11}{420}$	$\frac{199}{5040}$	$\frac{-1}{840}$	$\frac{-101}{2640}$
5	10	35	50	24	$\frac{-95}{12}$	$\frac{863}{504}$	$\frac{-95}{252}$	$\frac{-47}{720}$	$\frac{79}{504}$	$\frac{-53}{1232}$
6	15	85	225	274	120	$\frac{-19087}{504}$	$\frac{1375}{168}$	$\frac{-9829}{5040}$	$\frac{-19}{112}$	$\frac{8213}{11088}$
7	21	175	735	1624	1764	720	$\frac{-5257}{24}$	$\frac{33953}{720}$	$\frac{-2849}{240}$	$\frac{-139}{1584}$
8	28	322	1960	6769	13132	13068	5040	$\frac{-1070017}{720}$	$\frac{57281}{160}$	$\frac{-330157}{3960}$

15.° I numeri che nella tavola stanno fuori delle righe più grosse, e che sono tutti interi, sono i coefficienti degli sviluppi dei fattoriali in potenze e di queste in quelli. Così

$$[a]^4 = a(a+1)(a+2)(a+3) = a^4 + (4)_1 a^3 + (4)_2 a^2 + (4)_3 a,$$
$$[a]^{-3} = \frac{1}{(a-1)(a-2)(a-3)} = a^{-3} + (-3)_1 a^{-4} + (-3)_2 a^{-5} + (-3)_3 a^{-6} + \text{ec.},$$
$$a^4 = [a]^4 - (-3)_1 [a]^3 + (-2)_2 [a]^2 - (-1)_3 a,$$
$$a^{-4} = [a]^{-4} - (-5)_1 [a]^{-5} + (-6)_2 [a]^{-6} - (-7)_3 [a]^{-7} + \text{ec.}$$

16.° Le espressioni generali dei numeri $(n)_r$ sono di forma piuttosto complicata:

$$(n)_1 = \frac{(-n)(1-n)}{2}, \quad (n)_2 = \frac{(1-3n)(-n)(1-n)(2-n)}{24},$$
$$(n)_3 = \frac{(-n)^2(1-n)^2(2-n)(3-n)}{48}, \quad \text{ecc.}$$

Essi tutti si annullano quando $r+1 > n > -1$: togliendo dalle predette espressioni quel fattore che le fa annullare, si hanno altri numeri frazionarii, che io segno con $\frac{1}{0}(n)_r$, e che sono quelli posti nella tavola tra le righe grosse; così $\frac{1}{0}(0)_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{0}(0)_2 = \frac{1.1.2}{24}$, $\frac{1}{0}(0)_3 = \frac{0.1.2.3}{48}$, ec., $\frac{1}{0}(1)_1 = \frac{-1}{2}$, $\frac{1}{0}(1)_2 = \frac{-2.-1.1}{24}$, $\frac{1}{0}(1)_3 = \frac{1.0.1.2}{48}$, ec. $\frac{1}{0}(2)_2 = \frac{-3.-2.-1}{24}$, $\frac{1}{0}(2)_3 = \frac{2^2.1.1}{48}$, $\frac{1}{0}(3)_3 = \frac{9.4.-1}{48}$, ec. ec.

17.° I coefficienti della tavola si calcolano mediante la relazione $(n+1)_r = (n)_r + n(n)_{r-1}$, essendo inoltre

$$(n)_0 = 1, \quad (-1)_r = 1, \quad (r+1)_r = 1.2.3\ldots.r.$$

Pei coefficienti frazionarii serve la stessa relazione, purchè si determinino quelli della prima riga mediante le formule, che danno i numeri Bernulliani, giacchè $\frac{1}{0}(0)_2 = \frac{1}{2}B_1$, $\frac{1}{0}(0)_4 = -\frac{1}{4}B_3$, $\frac{1}{0}(0)_6 = \frac{1}{6}B_5$, ec. Per sapere come procedano questi $\frac{1}{0}(0)_{2r}$ giova aver presente la formula

$$\mp\frac{1}{0}(0)_{2r} = \frac{2.1.2.3.\ldots.(2r-1)}{(2\pi)^{2r}}\left(1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \text{ec.}\right)$$

18.° Ora coi coefficienti $(n)_r$ e coi fattoriali dell' unità 1, 2, 6, 24, 120, ec. si ha

$$(11)\qquad \left(\frac{\Delta}{\log(1+\Delta)}\right)^{r+1} = 1 + \frac{(-r)_1}{r}\Delta + \frac{(1-r)_2}{(r-1)r}\Delta^2 \ldots$$
$$+ \frac{(0)_{r+1}}{0.1.2.\ldots.r}\Delta^{r+1} - \frac{(1)_{r+2}}{1.0.1.2\ldots r}\Delta^{r+2} + \frac{(1)_{r+3}}{2.0.1.2\ldots r}\Delta^{r+3}$$
$$- \frac{(3)_{r+4}}{6.0.1.2\ldots r}\Delta^{r+4} + \text{ec.}$$

$$(12)\qquad \left(\frac{d}{e^d - 1}\right)^r = 1 + \frac{(r)_1}{1-r}d + \frac{(r)_2}{(1-r)(2-r)}d^2 \ldots\ldots$$
$$+ \frac{(r)_r}{(1-r)(2-r)\ldots.(-1)\,0}d^r + \frac{(r)_{r+1}}{(1-r)(2-r)\ldots(-1)0.1}d^{r+1}$$
$$+ \frac{(r)_{r+2}}{(1-r)\ldots(-1)\,0.1.2}d^{r+2} + \text{ ec.}$$

19.° Risulta dalla (11) e dalle considerazioni fatte ai § 5. 7. 11 che

$$\int^{r+1} = (V^n - V^{r+1})\,\Sigma^{r+1} + \frac{(-r)_1}{r}(V^n + V^r)\;\Sigma^r$$
$$+ \frac{(1-r)_2}{(r-1)r}(V^n - V^{r-1})\,\Sigma^{r-1} + \text{ec.}$$

e siccome $(V^n - V^{r+1})\;\Sigma^{r+1} = (V^{r+1} + V^{r+2}\ldots + V^{n-1})\;\Sigma^r$; così avremo la formula, che comprende come casi particolari le (3) (4) (5) .

$$(13)\qquad \frac{1}{\alpha^{r+1}}\,{}^0\!\!\int_n {}^0\!\!\int^r = (V^r + V^{r+1}\ldots + V^n)\;\Sigma^r$$
$$+ \frac{(-r)_1 - r}{r}(V^n + V^r)\;\Sigma^r + \frac{(1-r)_2}{(1-r)r}(V^n - V^{r-1})\;\Sigma^{r-1}$$
$$+ \frac{(2-r)_3}{(r-2)\,(r-1)r}(V^n + V^{r-2})\;\Sigma^{r-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)_r}{1.2\ldots r}(V^n \mp V)\;\Sigma \mp \frac{(0)_{r+1}}{0.1.2\ldots r}(V^n \pm V^0)$$
$$\mp (V^{n-1} \mp V^1)\,\Delta \mp \frac{(2)_{r+3}}{2.0.1.2\ldots.r}(V^{n-2} \pm 1)\,\Delta^2$$
$$\mp \frac{(3)_{r+4}}{6.0.1.2.\ldots.r}(V^{n-3} \mp 1)\,\Delta^3 \mp \text{ec.}$$

i segni superiori valendo per r pari e gli inferiori per r dispari. Ciascun

delle $V\Sigma$, $V'\Sigma'$, ... dev' essere determinata mediante la formula, che comprende come casi particolari le (6) (9),

$$(14)\qquad V^r\Sigma^r = \frac{1}{0.1.2\ldots(r-1)}\Big\{-(r)_r d^0 + \frac{1}{1}(r)_{r+1}\alpha d - \frac{1}{2}(r)_{r+2}\alpha^2 d^2 + \frac{1}{6}(r)_{r+3}\alpha d^r - \text{ec.}\Big\};$$

che se non si conoscano i differenziali, si ridurrà questa formula a contenere invece le differenze, osservando che $\alpha d = \log(1+\Delta)$, e si avranno le formule (7) (10) e la generale

$$(15)\qquad V^r\Sigma^r = \frac{1}{0.1.2\ldots(r-1)}\Big\{-(r)_r\Delta^0 + \frac{1}{1}(r)_{r+1}\Delta - \frac{1}{2}\Big((r)_{r+1}(2)_1 + (r)_{r+2}\Big)\Delta^2 + \frac{1}{6}\Big((r)_{r+1}(3)_2 + (r)_{r+2}(3)_1 + (r)_{r+3}\Big)\Delta^3 - \frac{1}{24}\Big((r)_{r+1}(4)_3 + (r)_{r+2}(4)_2 + (r)_{r+3}(4)_1 + (r)_{r+4}\Big)\Delta^4 + \text{ec.}\Big\}.$$

20.° Nell' esempio del § 6 trovai mediante le (14), $V^3\Sigma^3 = 0{,}3597074$, $V^4\Sigma^4 = 0{,}3342202$, $V^5\Sigma^5 = 0{,}3162325$; e col loro mezzo calcolai l' integrale quarto $= 0{,}03530735$, il quinto $= 0{,}007237008$, ed il sesto $= 0{,}0012281368$, i cui errori giungono appena a due unità delle ultime decimali.

21.° Potrebbero cercarsi altre formule, che dessero gli integrali tra $x=0$ ed $x=n$ conoscendo i valori di y corrispondenti ad $x=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ... $\left(n-\frac{1}{2}\right)$: gioverebbe pure determinare direttamente le differenze degli integrali quando x riceve un dato accrescimento. D' altronde, se si supponessero conosciuti non solamente i valori delle derivate corrispondenti ad $x=0$, ma eziandio quelli corrispondenti ad $x=n$, si potrebbe fare a meno di calcolare (§ 1) le differenze, ed adoperare le formule

$$\frac{1}{\alpha}\,{}^0\!\!\int_n = \frac{1}{2}V^0 + V^1 + V^2 \ldots + V^{n-1} + \frac{1}{2}V^n + (V^n - 1)\left(\frac{\alpha d}{12} - \frac{\alpha^3 d^3}{6.120} + \frac{\alpha^5 d^5}{120.252} - \frac{\alpha^7 d^7}{5040.240} + \text{ec.}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\,{}^0\!\int_n {}^0\!\int = (V + V^1 \ldots + V^n)\,\Sigma + \frac{1}{12}(V^n - V^0)$$
$$+ (V^n - 1)\left(\frac{\alpha^2 d^2}{2.120} - \frac{\alpha^4 d^4}{24.252} + \frac{\alpha^6 d^6}{720.240} - \text{ec.}\right),$$
$$\frac{1}{\alpha^3}\,{}^0\!\int_n {}^0\!\int {}^0\!\int = (V^2 + V^3 \ldots + V^n)\,\Sigma^3 + \frac{1}{2}(V^n + V^2)\,\Sigma^2 + \frac{1}{2}(V^n - V)\,\Sigma$$
$$+ (V^n - 1)\left\{\frac{\alpha d}{240} - \frac{\alpha^3 d^3}{6.504} + \frac{\alpha^5 d^5}{120.480} - \frac{\alpha^7 d^7}{5040.264} + \text{ec.}\right\}.$$

Ma pel calcolo di un integrale isolato mi sembrano di un uso più generale le formule date precedentemente, le quali non richieggono alcuna conoscenza intorno alla funzione, di cui sono dati gli $n+1$ valori $y_0, \ldots y_n$. Applicando quelle formule al caso di $y = e^x$, posto $\alpha = \frac{1}{5}$, $n = 5$, e calcolando con sei decimali ottenni gl' integrali da $x = 0$ ad $x = 1$ primo, secondo, terzo, quarto, quinto e sesto rispettivamente esatti fino alle decimali 6.ª, 6.ª, 6.ª, 7.ª, 8.ª, 9.ª

Aggiunta alla suddetta Memoria.

Nel Giornale astronomico intitolato *Berliner Astr. Jahrbuch für* 1837, l'Encke diede alcune formule, che sono comodissime per calcolare molti valori successivi degli integrali di una funzione data mediante i suoi valori corrispondenti ad $x = 0, 1, 2, \ldots$ Spero che a qualche lettore piaccia di trovare qui esposte brevemente tali formule, alle quali aggiungo quelle che danno i valori delle derivate, che in alcune occasioni possono occorrere non meno degli integrali.

Supponiamo che si conoscano tutte le differenze apparenti dal seguente prospetto

			⋮					
$V\Sigma^3$		Σ		$V^{-1}\Delta$		$V^{-2}\Delta^3$		$V^{-3}\Delta^5$
	$V\Sigma^2$		$V^0 = y_0$		$V^{-1}\Delta^2$		$V^{-2}\Delta^4$	
$V^2\Sigma^3$		$V\Sigma$		Δ		$V^{-1}\Delta^3$		$V^{-2}\Delta^5$
	$V^2\Sigma^2$		$V^1 = y_1$		Δ^2		$V^{-1}\Delta^4$	
$V^3\Sigma^3$		$V^2\Sigma$		$V\Delta$		Δ^3		$V^{-1}\Delta^5$
	$V^3\Sigma^2$		$V^2 = y_2$		$V\Delta^2$		Δ^4	
$V^4\Sigma^4$		$V^3\Sigma$		$V^2\Delta$		$V\Delta^3$		Δ^5
			⋮					
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

perlochè converrà calcolare altri valori della y prima e dopo dei due confini y_0 y_n, il che è quanto io volli evitare nella precedente memoria. Del resto anche colla sola conoscenza dei $y_0, y_1 \ldots y_n$, se supporremo che le Δ^n sieno costanti potremo estendere la tavola come nel precedente prospetto, e come è richiesto dalle formule dell' Encke.

Il valore della prima derivata d, che simbolicamente è espresso da $d = \log(1+\Delta)$, viene dato da una serie molto semplice, quando si segni con M il medio aritmetico tra un valore ed il suo variato successivo, cioè si ponga $M V^i = \frac{1}{2}(V^i + V^{i+1})$; questa serie è

$$(I) \qquad \alpha d = M\left(V^{-1}\Delta - \frac{1}{6}V^{-2}\Delta^3 + \frac{1}{30}V^{-3}\Delta^5 - \frac{1}{140}V^{-4}\Delta^7 + \frac{1}{630}V^{-5}\Delta^9 - \frac{1}{2772}V^{-6}\Delta^{11} + \text{ec.}\right).$$

Si vede che la formula contiene le sole differenze prima, terza, quinta, ec., e che i termini $V^{-1}\Delta$, Δ; $V^{-2}\Delta^3$, $V^{-1}\Delta^3$; $V^{-3}\Delta^5$, $V^{-2}\Delta^5$; ec., dei quali deggiono calcolarsi le medie aritmetiche, sono nella precedente tavola in due righe orizzontali l'una sopra, l'altra sotto, del termine y_0, cui appartiene la derivata che vuol calcolarsi, e che è segnata con d. Vi si è aggiunto il coefficiente α pel caso che i valori della x, cui corrispondono $y_1, y_2, y_3 \ldots$ sieno α, 2α, $3\alpha \ldots$

Per la derivata seconda non occorre alcun medio e si ha

$$(I) \qquad \alpha^2 d^2 = V^{-1}\Delta^2 - \frac{1}{12}V^{-2}\Delta^4 + \frac{1}{90}V^{-3}\Delta^6 - \frac{1}{560}V^{-4}\Delta^8 + \frac{1}{3150}V^{-5}\Delta^{10} - \frac{1}{16632}V^{-6}\Delta^{12} + \text{ec.}$$

i cui termini sono sulla riga orizzontale corrispondente ad y_0.

Similmente

$$(I) \qquad \begin{aligned} \alpha^3 d^3 &= M\left(V^{-2}\Delta^3 - \frac{1}{4}V^{-3}\Delta^5 + \frac{7}{120}V^{-4}\Delta^7 - \frac{41}{3024}V^{-5}\Delta^9 + \frac{479}{151200}V^{-6}\Delta^{11} - \text{ec.}\right) \\ \alpha^4 d^4 &= V^{-2}\Delta^4 - \frac{1}{6}V^{-3}\Delta^6 + \frac{7}{240}V^{-4}\Delta^8 - \frac{41}{7560}V^{-5}\Delta^{10} + \frac{479}{453600}V^{-6}\Delta^{12} - \text{ec.} \end{aligned}$$

Che se si vogliano i valori corrispondenti ad $x = \frac{\alpha}{2}$, (anzichè ad $x = 0$), valori che noi segneremo con $V^{\frac{1}{2}}$, serviranno le serie

$$V^{\frac{1}{2}} = M\left(V^0 - \frac{1}{8}V^{-1}\Delta^2 + \frac{3}{128}V^{-2}\Delta^4 - \frac{5}{1024}V^{-3}\Delta^6 + \frac{35}{32768}V^{-4}\Delta^8 - \text{ec.}\right)$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha V^{\frac{1}{2}}d = \Delta - \frac{1}{24}V^{-1}\Delta^3 + \frac{3}{640}V^{-2}\Delta^5 - \frac{5}{7168}V^{-3}\Delta^7 + \frac{35}{294912}V^{-4}\Delta^9 - \text{ec.}$$

$$\alpha^2 V^{\frac{1}{2}}d^2 = M\left(V^{-1}\Delta^2 - \frac{3}{24}V^{-2}\Delta^4 + \frac{7.37}{128.45}V^{-3}\Delta^6 - \frac{3229}{1024.45.7}V^{-4}\Delta^8 + \text{ec.}\right)$$

$$\alpha^3 V^{\frac{1}{2}}d^3 = V^{-1}\Delta^3 - \frac{1}{8}V^{-2}\Delta^5 + \frac{37}{1920}V^{-3}\Delta^7 - \frac{3229}{1024.135.7}V^{-4}\Delta^9 + \frac{59.181}{32768.21.25}V^{-5}\Delta^{11} - \text{ec.}$$

Per calcolare gl' integrali presi tutti da $x = 0$ bisognerà da prima determinare le sommatorie Σ, Σ^2, ec. col mezzo delle formule

$$\frac{1}{\alpha}\int = M\left(\Sigma - \frac{1}{12}V^{-1}\Delta + \frac{11}{720}V^{-2}\Delta^3 - \frac{191}{60480}V^{-3}\Delta^5 + \frac{2497}{3628800}V^{-4}\nabla^7 - \text{ec.}\right)$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{\alpha^2}\int^2 = V\Sigma^2 + \frac{1}{4.3}V^0 - \frac{1}{16.15}V^{-1}\Delta^2 + \frac{31}{64.27.35}V^{-2}\Delta^4 - \frac{289}{256.81.175}V^{-3}\Delta^6 + \frac{317}{1024.81.275}V^{-4}\Delta^8 - \text{ec.}$$

$$\frac{1}{\alpha^3}\int^3 = M\left(V\Sigma^3 + \frac{1}{240}V^{-1}\Delta - \frac{31}{30240}V^{-2}\Delta^3 + \frac{289}{1209600}V^{-3}\Delta^5 - \text{ec.}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha^4}\int^4 = V^2\Sigma^4 + \frac{1}{6}V^{-1}\Sigma^2 - \frac{1}{720}V^0 + \frac{1}{3024}V^{-1}\Delta^2 - \frac{41}{725760}V^{-2}\Delta^4 + \frac{191}{512.243.385}V^{-3}\Delta^6 - \text{ec.}$$

ponendone i primi membri eguali a zero: così la seconda darà

$$V\Sigma^2 = -\frac{1}{12}V^0 + \frac{1}{240}V^{-1}\Delta^2 - \frac{31}{60480}V^{-3}\Delta^4 + \text{ec.};$$

la prima non dà Σ, bensì $M\Sigma = \frac{1}{2}(\Sigma + V\Sigma)$, ma sapendosi che $V\Sigma = \Sigma + y_0$, se ne dedurrà tosto il valore di $\Sigma = -\frac{1}{2}V^0 + M(\frac{1}{12}V^{-1}\Delta - \text{ec.})$, il quale sostituito nella terza darà $MV\Sigma^3 = \frac{1}{2}(V\Sigma^3 + V^2\Sigma^3) = V\Sigma^3 + \frac{1}{2}V\Sigma^2 = M\left(-\frac{1}{240}V^{-1}\Delta + \text{ec.}\right)$. Coi trovati valori di Σ, $V\Sigma^2$, $V\Sigma^3$, $V^2\Sigma^4$, ec. si calcoleranno mediante successive sommazioni quante occorrano delle prime colonne della precedente tabella; dopo di che le medesime serie (III) ci daranno i valori degl' integrali estesi da $x = 0$ fino ad $x = n\alpha$, bastando a tal uopo di aggiungere a ciascun termine il fattore V^n. Così, per esempio, l' integrale secondo, che si annulla insieme col suo differenziale quando $x = 0$, esteso fino ad $x = 2\alpha$ avrà il valore $V^2\int^2$ dato dalla

$$\frac{1}{\alpha^2}V^2\int^2 = V^2\Sigma^2 + \frac{1}{12}V^1 - \frac{1}{240}V\Delta^2 + \frac{31}{60480}V^{-1}\Delta^4 - \text{ec.}$$

Si ponga mente che ogni formula contiene i termini che nella tabella sono posti su righe orizzontali.

Con eguale facilità possono calcolarsi i predetti integrali da $x = 0$ fino ad $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha$, servendo a ciò le serie:

$$\frac{1}{\alpha}V^{\frac{1}{2}}\int = V\Sigma + \frac{1}{24}\Delta - \frac{17}{5760}V^{-1}\Delta^3 + \frac{567}{967680}V^{-2}\Delta^5$$
$$- \frac{13.2143}{464486400}V^{-3}\Delta^7 - \text{ec.}$$

$$\text{(IV)} \quad \frac{1}{\alpha^2}V^{\frac{1}{2}}\int^2 = M\left(V\Sigma^2 - \frac{1}{24}V^0 + \frac{17}{1920}V^{-1}\Delta^2 - \frac{367}{193536}V^{-3}\Delta^4 + \text{ec.}\right)$$
$$\frac{1}{\alpha^3}V^{\frac{1}{2}}\int^3 = V^2\Sigma^3 + \frac{1}{8}V\Sigma - \frac{7}{1920}\Delta + \frac{457}{967680}V^{-1}\Delta^3 - \text{ec.}$$

aggiungendo a ciascun termine il fattore V^n. Così l' integrale primo esteso da $x = 0$ ad $x = \frac{5}{2}\alpha$ è dato da

$$\frac{1}{\alpha}V^{\frac{5}{2}}\int = V^3\Sigma + \frac{1}{24}V^2\Delta - \frac{17}{5760}V\Delta^3 - \text{ec.}$$

Che se tutti gl' integrali si vogliano prendere da $x = \frac{1}{2}\alpha$, bisognerà

calcolare le Σ, $V\Sigma^2$, ec. non più mediante le (III), bensì col mezzo delle (IV) ponendone i primi membri eguali a zero. Dopo ciò le stesse (IV) aggiuntovi il fattore V^n daranno gl' integrali da

$x=\frac{1}{2}\alpha$ ad $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha$: e similmente le (III) daranno gl'integrali da $x=\frac{1}{2}\alpha$, ad $x=n\alpha$.

Applichiamo le precedenti formole all'esempio del § 6 ; e per non calcolare alcun altro valore della funzione $y=\frac{1}{x+1}$ fuori dei due limiti $x=0$, $x=1$, supponiamo che le differenze quinte sieno costanti, e compiamo in tal modo la seguente tabella

Σ^2	Σ	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
	−0,5163496		−2440481		−456339		
−0,0830190		1,0000000		773814		158736	
	0,4834504		−1666667		−297623		
0,4004514		0,8333333		476191		119051	
	1,3167857		−1190476		−178372		
1,7172151		0,7142857		297619		79366	
	2,0310694		− 892857		− 99206		−39685
3,7482845		0,625		198413		39681	
	2,6560694		− 694444		− 59525		
6,4043559		0,5555556		158888		− 4	
	3,2146250		− 555556		− 59529		
9,6159789		0,5		79339		−39689	
	3,7146250		− 476197		− 99218		

La prima delle (I) ci dà per la derivata di y corrispondente ad $x=0$ $d=-0,996032$, che è lo stesso valore che si otterrebbe dalla formula $\alpha d=\log(1+\Delta)=\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-$ec. La seconda delle (I) dà $d^2=1,901465$ invece del valore esatto $d^2=2$. Per la stessa seconda derivata corrispondente ad $x=1$, cioè ad $n=5$ si troverebbe $V^5d^2=0,20666$ invece di 0,25.

$$MV^{-1}\Delta = -0,2053574$$
$$-\frac{1}{6}MV^{-2}\Delta^3 = +\quad 62832$$
$$\frac{1}{30}MV^{-3}\Delta^5 = -\quad 1323$$
$$\alpha d = -0,1992065$$

$$V^{-1}\Delta^2 = 0,0773815$$
$$-\frac{1}{12}V^{-2}\Delta^4 = -\quad 13228$$
$$\alpha^2 d^2 = 0,0760586$$

$$V^4\Delta^2 = 79359$$
$$-\frac{1}{12}V^3\Delta^4 = +\quad 3307$$
$$\alpha^2 V^5 d^2 = 82666$$

La prima delle (II) dà $V^{\frac{1}{2}} = 0{,}90918$, come si sarebbe egualmente ottenuto dalla $V^{\frac{1}{2}} = (1+\Delta)^{\frac{1}{2}} = \Delta^0 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^2 +$ ec. Il valore esatto è $\frac{10}{11}$.

$$\begin{array}{rl} MV^0 = & 0{,}9166667 \\ -\frac{1}{8} MV^{-1}\Delta^2 = - & 78125 \\ \frac{5}{128} MV^{-2}\Delta^4 = & 3255 \\ \hline V^{\frac{1}{2}} = & 0{,}9094797 \end{array}$$

Perchè gl' integrali comincino da $x=0$ porremo lo zero in luogo dei primi membri delle (III) ed avremo $\Sigma = -0{,}5165496$, $V\Sigma^2 = -0{,}0830190$, che pienamente si accordano coi valori trovati ai §§ 9, 13 mediante le (7) (10).

$$\begin{array}{rl} -\frac{1}{2} V^0 = & -\,0{,}5 \\ \frac{1}{12} MV^{-1}\Delta = - & 0174131 \\ -\frac{11}{720} MV^{-2}\Delta^3 = + & 5760 \\ - & 125 \\ \hline \Sigma = & -\,0{,}5165496 \end{array}$$

Dopo ciò gl' integrali estesi da $x=0$ fino ad $x = 5\alpha = 1$ saranno $V^5 \int = 0{,}6931630$, $V^5 \int^2 = 0{,}3863044$. L' integrale esteso da $x=0$ ad $x = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10}$ è dato dalla prima delle (IV) $V^{\frac{1}{2}} \int = 0{,}095318$, coll'errore di $+\,0{,}000008$.

$$\begin{array}{rl} V\Sigma = & +\,0{,}4834504 \\ \frac{1}{24}\Delta = - & 69444 \\ -\frac{17}{5760} V^{-1}\Delta^3 = + & 878 \\ - & 16 \\ \hline \frac{1}{\alpha} V^{\frac{1}{2}} \int = & 0{,}4765922 \end{array}$$

I coefficienti delle predette serie possono, seguendo l' Encke, facilmente calcolarsi nel seguente modo. Supponga si che sia $y = e^{\alpha x}$, e che x prenda successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ec. sarà

$$V = e^{\alpha}, \quad \Delta = e^{\alpha} - 1, \quad d = \alpha, \quad \int = \frac{1}{\alpha}, \quad M = \frac{V^0 + V'}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^{\alpha})$$

e ad ogni moltiplicazione simbolica tra i primi membri corrisponderà una moltiplicazione effettiva tra i secondi membri; pongasi pure, per brevità,

$$\delta^2 = V^{-1}\Delta =^2 e^{-\alpha}(e^{\alpha} - 1)^2$$

Nella teoria già esposta da V. Riccati, e della quale ora finalmente si apprezzano i vantaggi (1), sarà

$$MV^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{il } \textit{coseno iperbolico}, \text{ e}$$

$$\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{il } \textit{seno iperbolico} \text{ di } \frac{\alpha}{2};$$

perciò α sviluppato secondo le potenze di δ darà

$$\alpha = 2\,\mathrm{Asnh}\,\frac{\delta}{2} = \delta - \frac{\delta^3}{3.8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\delta^5}{5.32} - \frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{\delta^7}{7.128} + \text{ec.}$$

È egualmente semplice, ma forse meno conosciuto, lo sviluppo di α^2 che è

$$\alpha^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{2.2.3} + \frac{2\delta^6}{3.3.4.5} - \frac{2.3\delta^8}{4.4.5.6.7} + \frac{2.3.4\delta^{10}}{5.5.6.7.8.9} - \text{ec.}$$

Le varie potenze dello sviluppo di α, e la formula

$$D\alpha = \frac{1}{\mathrm{csh}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}}}{e^{\alpha}+1} = \frac{V^{\frac{1}{2}}}{M} = \frac{\Delta}{M\delta}$$

(1) Se 'AMBA, sia un semicircolo col centro C, AKL ne sia la tangente nel punto A, il raggio qualunque CM si prolunghi fino ad incontrare quella tangente in L, e si tirino perpendicolari alla medesima tangente la MK, e la indefinita LM', la quale sia tagliata in M' dalla prolungazione della CK; tutti i punti M' così determinati costituiranno un'iperbola equilatera AM' omologa del circolo AM (mia Geometria descrittiva, § 108). Ora se il raggio CA prendasi per unità di lunghezza, e dai punti M, M' si abbassino su di esso le perpendicolari MP, M'P' è noto che PM=AK, CP, ed AL sono il *seno*, il *coseno* e la *tangente* dell'arco AM, o, quel che è lo stesso, del *doppio del settore circolare* CAM. Analogamente a ciò P'M' = AL, CP' ed AK sono il *seno*, il *coseno* e la *tangente iperbolici del doppio del settore iperbolico* CAM'.

Chiamati A, α questi doppii settori circolare ed iperbolico si ha $\mathrm{sen}\,A = \mathrm{tgh}\,\alpha$, $\mathrm{tg}A = \mathrm{snh}\alpha$, $\cos A\,.\,\mathrm{csh}\,\alpha = 1$, e facilmente si trova $\mathrm{snh}\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)$, $\mathrm{csh}\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)$, ec. La relazione tra A ed α può esprimersi con

$$\alpha = \mathrm{dig}_1 A = A + \tfrac{1}{6} A^3 + \tfrac{1}{24} A^5 + \text{ec.}$$

$$A = \mathrm{amp}_1 \alpha = \alpha - \tfrac{1}{6}\alpha^3 + \tfrac{1}{24}\alpha^5 - \text{ec.}$$

giacchè nella teoria della prima trascendente ellittica quando il modulo è eguale all'unità, α è il *digamma* dell'*amplitudine* A.

che si deduce dalla $\delta = 2 \operatorname{snh} \frac{\alpha}{2}$ prendendone la derivata rispetto a δ, danno con molta facilità tutte le formule che vogliamo dimostrare.

Così la seconda delle (I) è subito data da

$$d^2 = \alpha^2 = \delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \text{ec.} \quad = V^{-1}\Delta^2 - \frac{1}{12}V^{-2}\Delta^4 + \text{ ec.}$$

La terza $d^3 = \alpha^3 = \delta^3 - \frac{1}{8}\delta^5 + \text{ec.}$ conterrebbe le potenze dispari di δ; ma aggiungendo al secondo membro il fattore

$$\frac{M\delta}{\Delta}\,\mathrm{D}\alpha = 1$$

si ha
$$d^3 = M\frac{\delta}{\Delta}\alpha^3\mathrm{D}\alpha = \frac{1}{4}M\frac{\delta}{\Delta}\mathrm{D}(\alpha^4) = M\frac{\delta}{\Delta}\left(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \text{ec.}\right)$$
$$= M\left(V^{-1}\Delta^3 - \frac{1}{4}V^{-3}\Delta^5 + \text{ec.}\right)$$

cioè basta prendere la derivata rispetto a δ della $\alpha^4 = \delta^4 - \frac{1}{6}\delta^6 + \text{ec.}$

La prima delle (IV) è data da

$$V^{\frac{1}{2}}\int = V^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\alpha} = V^{\frac{1}{2}}\left(\delta^{-1} + \frac{1}{24}\delta - \text{ec.}\right) = V\Sigma + \frac{1}{24}\Delta - \text{ec.}$$

La seconda delle (IV) è

$$V^{\frac{1}{2}}\int^2 = V^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\alpha^2} = M\frac{\mathrm{D}\alpha}{\alpha^2} = -M\mathrm{D}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

e quindi si ottiene prendendo la derivata rispetto a δ della precedente. La prima delle (III) $\int = M\frac{\delta}{\Delta}\frac{\mathrm{D}\alpha}{\alpha}$ richiede che si calcoli il prodotto delle due serie

$$\frac{1}{\alpha} = \delta^{-1} + \frac{1}{24}\delta - \text{ec.}, \qquad \mathrm{D}\alpha = 1 - \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{5}{128}\delta^4 - \text{ec. ec.}$$

Il prof. Fedele Amante pubblicò fino dal 1843 (Napoli) una tavola per l' interpolazione che si fonda sulla formula, che è media aritmetica tra le due seguenti

$$\text{(A)} \quad V^t = V^0 + t\left\{\Delta + \frac{t-1}{2}\left[V^{-1}\Delta^2 + \frac{t+1}{3}\left(V^{-1}\Delta^3 + \frac{t-2}{4}\left[V^{-2}\Delta^4 + \frac{t+2}{5}V^{-2}\Delta^5 + \text{ec.}\right]\right)\right]\right\}$$

$$(B)\quad V^t = V^0 + t\left\{\Delta + \frac{t-1}{2}\left[\Delta^2 + \frac{t-2}{3}\left(V^{-1}\Delta^3 + \frac{t+1}{4}\left(V^{-1}\Delta^4 + \frac{t-3}{5}V^{-2}\Delta^5 + \text{ec.}\right)\right)\right]\right\};$$

ed egli mostra come per $0 < t < 1$ essa sia più comoda di ciascuna delle (A) (B).

Moltiplicando una di queste formule per le (III) e per V^n si ottengono le serie che danno gl' integrali fino al limite $(n+t)\alpha$ essendo t frazionario. Così pel secondo integrale basterà moltiplicare la (A) per la seconda delle (III), e si otterrà

$$\frac{1}{\alpha^2}V^t\int^2 = V\Sigma^2 + tV\Sigma + \frac{6t^2-6t+1}{12}V^0 + \frac{2t^3-t}{12}\Delta + \frac{t^4-2t^3+t^2-0{,}1}{24}V^{-1}\Delta^2 + \text{ec.}$$

Pel primo integrale possiamo dare alla prima delle (III) le due forme

$$\frac{1}{\alpha}\int = \Sigma + \frac{1}{2}V^0 - \frac{1}{12}V^{-1}\Delta - \frac{1}{24}V^{-1}\Delta^2 + \text{ec.} = V\Sigma - \frac{1}{2}V^0 - \frac{1}{12}\Delta + \frac{1}{24}V^{-1}\Delta^2 + \text{ec.}$$

e moltiplicandole rispettivamente per le due parti della (A) si ottiene

$$\frac{1}{\alpha}V^t\int = V\Sigma + \frac{2t-1}{2}V^0 + \frac{6t^2-1}{12}\Delta + \frac{4t^3-6t^2+1}{24}V^{-1}\Delta^2$$
$$+\left(\frac{t^4-2t^3}{24} + \frac{11}{720}\right)V^{-1}\Delta^3 + \text{ec.}$$

(Letta nei giorni 25 gennajo e 14 marzo 1855).